MEK4540/9540 – Høsten 2008 – Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Kan velge mellom følgende produksjonsmetoder:
- Spray-opplegg
- Håndopplegg
- Vakuum-bagging (i kombinasjon med håndopplegg eller andre metoder)
- Prepreg
- Vakuum-injisering
- RTM
- Vikling
- Pultrudering
- SMC, BMC

Fordeler og ulemper er knyttet til kriteriene for valg av metode som er bl.a:
- Produksjonsvolum
- Komponentens størrelse og form
- Krav til egenskaper (samt begrensning av variasjon i egenskapene)
- Overflate-finish (en- eller tosidig)
- Miljø mht. HMS

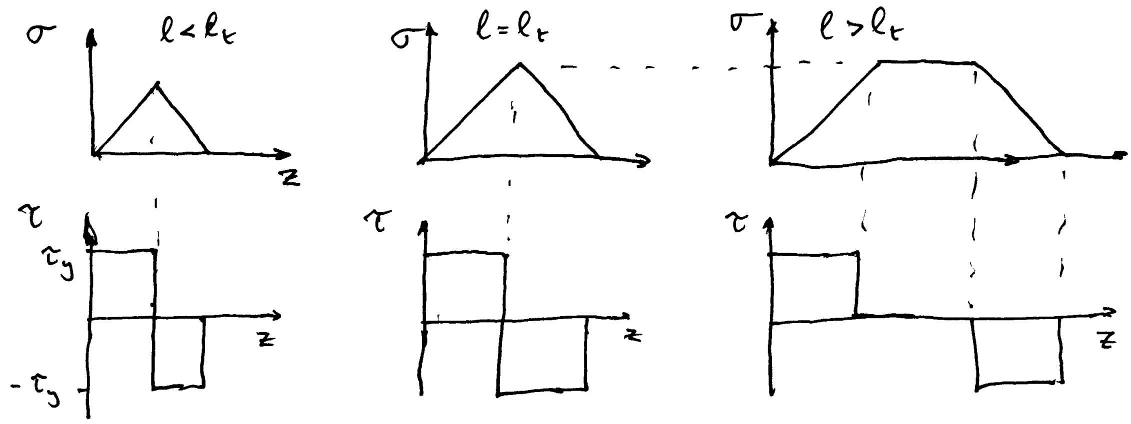
b) Antagelser for blandingsreglene:
- Perfekt heft mellom fiber og matrise
- Uniforme, kontinuerlige og parallelle fibere
- Lineært elastisk oppførsel i både fibere og matrise
- For egenskaper i tverretningen, antar også de enkle blandingsreglene at komposittet kan modelleres som en serie med homogene lag av fiber- og matrisemateriale.

c) Kortfiberkompositter:

Lastoverføringslengden l_t: Den minste fiberlengden slik at spenningen i fibrene bygger seg opp til det samme nivået som kontinuerlige fibere under samme last.

Kritisk fiberlengde l_c: Den minste fiberlengden slik at spenningen i fibrene kunne bygge seg helt opp til bruddspenningen.

Spenningsfordelingene:



Oppgave 2

DEL A

a) For å bygge opp kompliansematrisen:

σ_L alene gir $\varepsilon_L = \dfrac{\sigma_L}{E_L},\ \ \varepsilon_T = -\nu_{LT}\varepsilon_L = -\nu_{LT}\dfrac{\sigma_L}{E_L},\ \ \gamma_{LT} = 0$

σ_T alene gir $\varepsilon_T = \dfrac{\sigma_T}{E_T},\ \ \varepsilon_L = -\nu_{TL}\varepsilon_T = -\nu_{TL}\dfrac{\sigma_T}{E_T},\ \ \gamma_{LT} = 0$

τ_{LT} alene gir $\varepsilon_L = 0,\ \ \varepsilon_T = 0,\ \ \gamma_{LT} = \dfrac{\tau_{LT}}{G_{LT}}$

Superponerer disse tøyningene:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_L &= \frac{\sigma_L}{E_L} - \nu_{TL}\frac{\sigma_T}{E_T}\\ \varepsilon_T &= \frac{\sigma_T}{E_T} - \nu_{LT}\frac{\sigma_L}{E_L}\\ \gamma_{LT} &= \frac{\tau_{LT}}{G_{LT}}\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}\varepsilon_L\\ \varepsilon_T\\ \gamma_{LT}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\dfrac{1}{E_L} & -\dfrac{\nu_{TL}}{E_T} & 0\\ -\dfrac{\nu_{LT}}{E_L} & \dfrac{1}{E_T} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{G_{LT}}\end{bmatrix}}_{=[S]}\begin{bmatrix}\sigma_L\\ \sigma_T\\ \tau_{LT}\end{bmatrix}$$

Antall uavhengige elastiske konstanter for planspenningstilstand er 4. Symmetri av tøyningstensoren krever at $S_{12} = S_{21}$, som fører til at

$$\frac{\nu_{LT}}{E_L} = \frac{\nu_{TL}}{E_T}$$

b) ABD-matrisen:

A angir sammenhengen mellom krefter i planet (både normale og skjærekrefter) og midtplantøyninger.

B angir kobling mellom krefter i planet og krumning/vridning samt mellom momenter (bøyning og vridning) og midtplantøyninger.

D angir sammenhengen mellom momenter (bøyning og vridning) og krumning/vridning.

A_{16} og A_{26} angir kobling mellom normalkrefter og skjærtøyning i planet samt mellom skjærkraft og normaltøyninger i midtplanet.

D_{16} og D_{26} angir kobling mellom bøyemomenter og vridning samt mellom vridningsmoment og krumning.

DEL B

(a) Numeriske verdier for komplianse- og stivhetsmatrisen for ett lag:

$$[S]=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{42500} & -\dfrac{0.26}{42500} & 0 \\ -\dfrac{0.26}{42500} & \dfrac{1}{8500} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1500} \end{bmatrix} MPa^{-1} = \begin{bmatrix} 2.35 & -0.61 & 0 \\ -0.61 & 11.76 & 0 \\ 0 & 0 & 66.67 \end{bmatrix} \times 10^{-5}\, MPa^{-1}$$

$$[Q]=[S]^{-1}=\begin{bmatrix} 43.1 & 2.24 & 0 \\ 2.24 & 8.62 & 0 \\ 0 & 0 & 1.50 \end{bmatrix} \times 10^{3}\, MPa$$

(b) For et 90-lag kan vi finne $[\overline{Q}]$-matrisen direkte ved å bytte om *L*- og *T*-retninger eller bruke *T*-matrisen (men da må vi ta hensyn til forskjellen mellom tensor- og ingeniør-skjærtøyninger).

$$[Q]=[S]^{-1}=\begin{bmatrix} 8.62 & 2.24 & 0 \\ 2.24 & 43.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.50 \end{bmatrix} \times 10^{3}\, MPa$$

A-matrisen bygges opp direkte ved å kombinere lagene, 6 mm med 0-retning og 4 mm med 90-retning:

$$[A]=\begin{bmatrix} 2.930 & 0.224 & 0 \\ 0.224 & 2.240 & 0 \\ 0 & 0 & 0.150 \end{bmatrix} \times 10^{5}\, N/mm$$

(c) Da er $[N]=[A][\varepsilon]$

hvor

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 2000 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

slik at

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.930 & 0.224 & 0 \\ 0.224 & 1.240 & 0 \\ 0 & 0 & 0.150 \end{bmatrix} \times 10^{5} \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 2000 \end{bmatrix} \times 10^{-6} = \begin{bmatrix} 304.2 \\ 134.4 \\ 30.0 \end{bmatrix} \mathrm{N/mm}$$

(d) For å finne E-modulen i *x*-retningen må A-matrisen inverteres og ε_x finnes for enaksiell spenning i *x*-retning, dvs. for gitt N_x med $N_y = N_{xy} = 0$.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.44 & -0.34 & 0 \\ -0.34 & 1.240 & 0 \\ 0 & 0 & 66.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

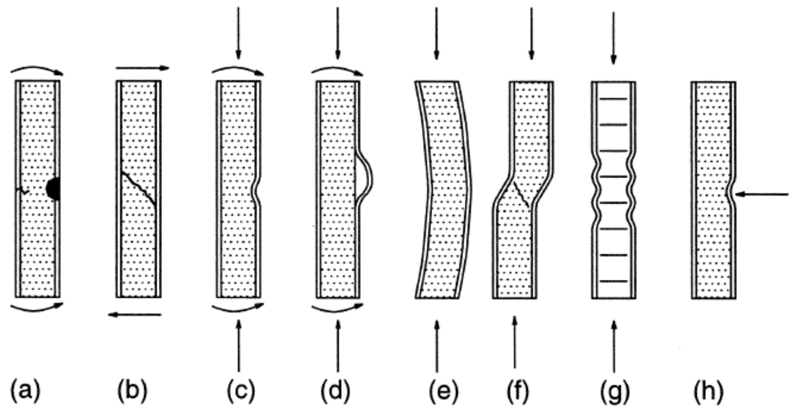
Så er $E_x = \sigma_x/\varepsilon_x = N_x/(\varepsilon_x \times \text{tykkelsen}) = 1/(3.44 \times 10^{-6} \times 10)\ \mathrm{N/mm^2}$ = <u>29 070 MPa</u>.

Oppgave 3

DEL A

(a) Fordeler med sandwich:
- Stor bøyestivhet (i forhold til vekten)
- Stor styrke i bøyning (i forhold til vekten)
- Glatte oveflater begge sider siden det ikke er behov for avstivning
- Muligens også termisk isolering, avhengig av kjernematerialet og anvendelse.

(b) Feilmekanismer i sandwich (se også skissene nedenfor fra Zenkert):
- Flyt og/eller brudd i skallene i enten strekk eller trykk (a)
- Flyt og/eller brudd i kjernen som resultat av skjærspenninger (b)
- Lokal deformasjon, evt. flyt og/eller brudd, forårsaket av konsentrerte laster eller ved sammenføyninger (h)
- Global knekning (generelt sett en blanding av bøyning og skjær). Knekning med kun bøyning og kun skjær (shear crimping) er begge ektreme tilfeller når den ene eller den andre type deformasjon er dominerende (e,f).
- Lokal knekning av skall (face sheet wrinkling eller dimpling) (c,d,g)
- For stor nedbøyning kan også være avgjørende.



DEL B

(a) Definisjoner:

Bøyestivhet D er forholdet mellom bøyemoment og krumning fra bøyning. Innenfor små forskyvninger er

$$D = (-)\,M_x \Big/ \frac{d^2 w_b}{dx^2},$$

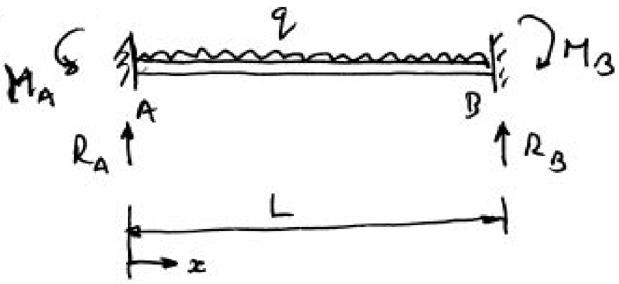
hvor w_b = forskyvning forårsaket av bøyning og M_x = bøyemoment per breddeenhet.

Skjærstivhet S er forholdet mellom skjærkraft og skjærdeformasjon målt som gjennomsnittlig skjærtøyning γ' over tversnittet mellom skallenes midtplan. Dersom det ikke er relativ forskyvning av skallene parallelt med bjelkens udeformerte akseretning ($\gamma_0 = 0$), og innenfor små forskyvninger, kan vi skrive

$$S = T_x \Big/ \frac{dw_s}{dx},$$

hvor w_s = forskyvning forårsaket av skjær og T_x = skjærkraft per breddeenhet.

(b)



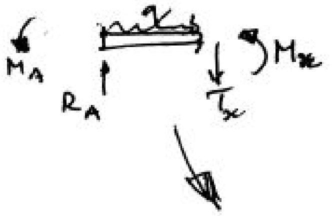
Ved bruk av symmetri har vi

$$M_A = M_B \quad \text{og} \quad R_A = R_B$$

Likevekt av vertikale krefter:

$$R_A + R_B = qL$$

$$\Rightarrow \quad R_A = R_B = q\frac{L}{2}$$



Partielle forskyvninger: $w = w_b + w_s$

fra bøyning — fra skjær-deformasjon

$$M_x = -M_A + R_A x - q\frac{x^2}{2} = -D w_b'' \qquad \text{—(1)}$$

$$T_x = R_A - qx = S w_s' \qquad \text{—(2)}$$

(1) integreres:

$$-Dw_b' = -M_A x + \tfrac{1}{2} R_A x^2 - \tfrac{1}{6} q x^3 + C_1$$

$$-Dw_b = -\tfrac{1}{2} M_A x^2 + \tfrac{1}{6} R_A x^3 - \tfrac{1}{24} q x^4 + C_1 x + C_2$$

Randbetingelser: $w_b = w_b' = 0$ ved $x = 0, L$

$w_b' = 0$ ved $x = 0 \rightarrow C_1 = 0$

$w_b = 0$ ved $x = 0 \rightarrow C_2 = 0$

For å finne M_A kan vi bruke enten $w_b' = 0$ eller $w_b = 0$ ved $x = L$:

$$-M_A L + \tfrac{1}{2} R_A L^2 - \tfrac{1}{6} q L^3 = 0$$

$$\rightarrow M_A L = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}qL\right)L - \tfrac{1}{6}qL^2 = \tfrac{1}{12}qL^2$$

Da er

$$w_b = \tfrac{1}{D}\left[\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{12}qL^2x^2 - \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{2}qLx^3 + \tfrac{1}{24}qx^4\right]$$

$$w_b = \frac{qx^2}{24D}(L-x)^2$$

(2) integreres:

$$S w_s' = T_x = R_A - qx$$

$$S w_s = R_A x - \tfrac{1}{2} q x^2 + C_3$$

Randbetingelser: $w_s = 0$ ved $x = 0, L$

$w_s = 0$ ved $x = 0 \rightarrow C_3 = 0$

$$w_s = \tfrac{1}{S}\left(R_A x - \tfrac{1}{2}qx^2\right) = \tfrac{1}{S}\left(q\tfrac{L}{2}x - \tfrac{1}{2}qx^2\right)$$

$$= \frac{qx}{2S}(L-x)$$

Bidragene kombineres: $w = w_b + w_s = \underline{\underline{\dfrac{qx^2}{24D}(L-x)^2 + \dfrac{qx}{2S}(L-x)}}$

Ved $x = L/2$ har vi $w = \delta = \dfrac{qL^4}{24\times16D} + \dfrac{qL^2}{8S} = \underline{\underline{\dfrac{qL^4}{384D}\left(1 + \dfrac{48D}{SL^2}\right)}}$

Her har vi antatt at bøyning- og skjærdelen kan løses separat for så å superponeres. Her fungerer dette fordi problemet er symmetrisk slik at vi allerede kan bestemme reaksjonskreftene fra symmetri og likevekt. Men det er også mulig – og ryddigere – å løse for den kombinerte forskyvningen w fra starten ved å bruke det at

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{d^2 w_s}{dx^2} = -\frac{M_x}{D} + \frac{1}{S}\frac{dT_x}{dx}$$

Nå blir det kun 3 ukjente konstanter – 2 integrasjonskonstanter pluss endemomentet M_A. Nå må følgende randbetingelser anvendes:

$w(0) = w(L) = 0$

og $\frac{dw_b}{dx} = \frac{dw}{dx} - \frac{dw_s}{dx} = \frac{dw}{dx} - \frac{1}{S}T_x = 0$ ved $x = 0, L$, hvor $T_x(0) = -T_x(L) = qL/2$

Vi trenger faktisk kun 3 av disse – bruk av symmetri har sørget for at den 4. automatisk blir tilfredsstilt.

(c)

Når D/SL^2 er liten har vi kun bøyning så $\delta \rightarrow qL^4/384D$. Dette skjer dersom D er liten, S er stor og/eller L er stor. Når D/SL^2 er stor har vi kun skjærdeformasjon så $\delta \rightarrow qL^2/4S$. Dette skjer dersom D er stor, S er liten og/eller L er liten.